Redes Bayesianas

Ano Lectivo 2010/2011 - 1^o Semestre – Adaptado de http://aima.eecs.berkeley.edu/slides-tex/

Resumo

- ♢ Sintaxe
- ♢ Semântica
- ♢ Distribuições parametrizadas

Redes Bayesianas

Notação gráfica simples para asserções de independência condicional
e portanto uma especificação compacta para distribuições conjuntas totais

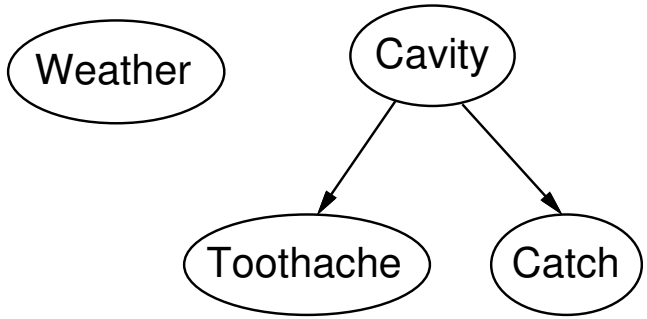
Sintaxe:

um conjunto de nós, um por variável
um grafo acíclico dirigido (arco $\approx$ "influencia directamente")
uma distribuição condicional para cada nó dados os seus pais:
$\mathbf{P}(X_i|Parents(X_i))$

No caso mais simples, distribuição condicional representada como
uma tabela de probabilidade condicionada (CPT) especificando
a distribuição de X_i para cada combinação dos valores dos pais

Exemplo

Topologia da rede codifica asserções de independência condicional:



$Weather$ é independente das outras variáveis

$Toothache$ e $Catch$ são condicionalmente independentes dado $Cavity$

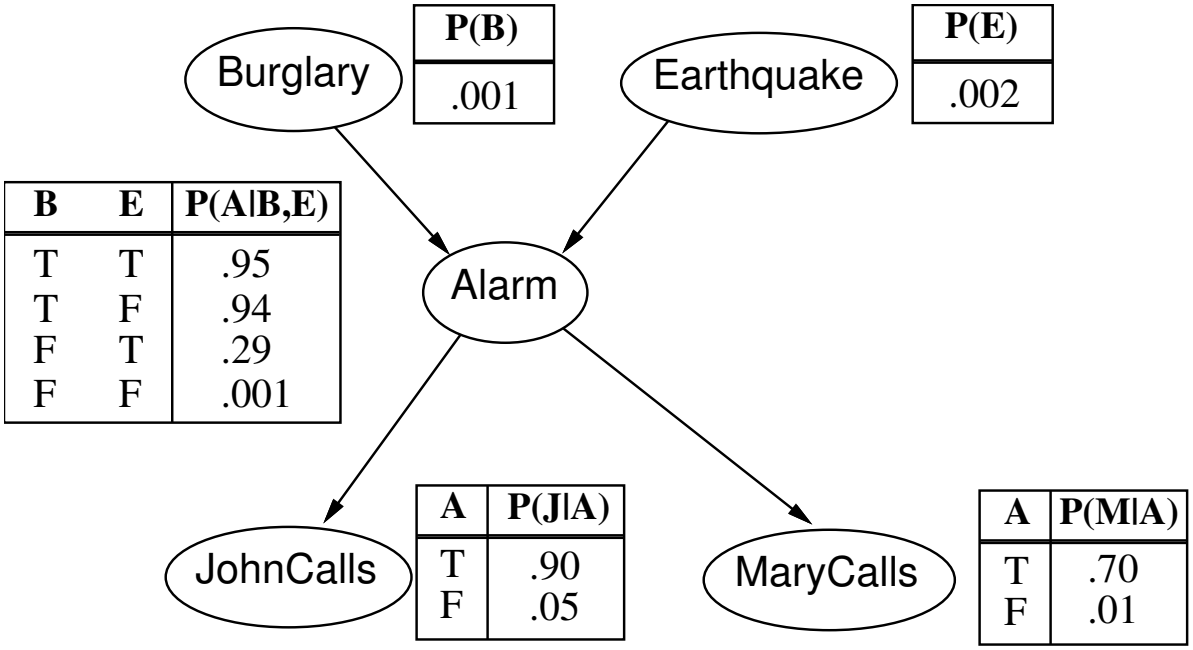
Exemplo

Estou no trabalho, o vizinho John telefona-me para dizer que o meu alarme está a tocar, mas a vizinha Mary não telefona. Ocasionalmente dispara por causa de pequenos tremores de terra. A minha casa está a ser assaltada?

Variáveis: $Burglar$, $Earthquake$, $Alarm$, $JohnCalls$, $MaryCalls$
Topologia da rede reflecte conhecimento "causal":

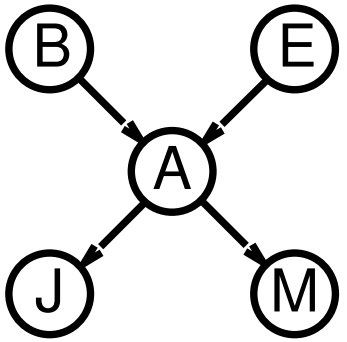
- Um assaltante pode disparar o alarme
- Um tremor de terra pode disparar o alarme
- O alarme pode fazer com que a Mary telefone
- O alarme pode fazer com que o John telefone

Exemplo (cont.)



Representação Compacta

Uma CPT para X_i Booleana com k pais Booleanos requer 2^k linhas para as combinações de valores dos pais



Cada linha requer um número p para $X_i = true$
(o número para $X_i = false$ é simplesmente $1 - p$)

Se cada variável não tem mais de k pais,
a rede precisa no total de $O(n \cdot 2^k)$ números

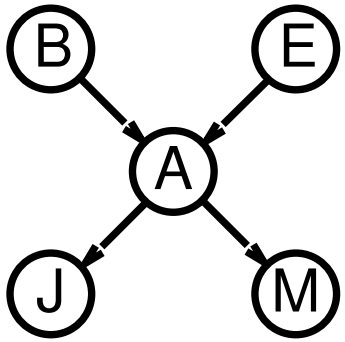
I.e., cresce linearmente com n, vs. $O(2^n)$ para a distribuição conjunta total

Para a rede do assaltante, $1 + 1 + 4 + 2 + 2 = 10$ números (vs. $2^5 - 1 = 31$)

Semântica Global

Semântica global define a distribuição conjunta total como o produto distribuições condicionais locais:

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i | Parents(X_i))$$



Nesta situação dizemos que a distribuição P é compatível com a rede G.

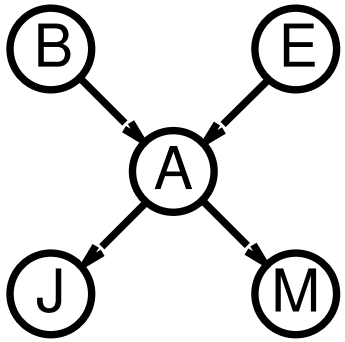
e.g., $P(j \wedge m \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg e)$

$=$

Semântica Global

Semântica global define a distribuição conjunta total como o produto distribuições condicionais locais:

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i | Parents(X_i))$$



Nesta situação dizemos que a distribuição P é compatível com a rede G.

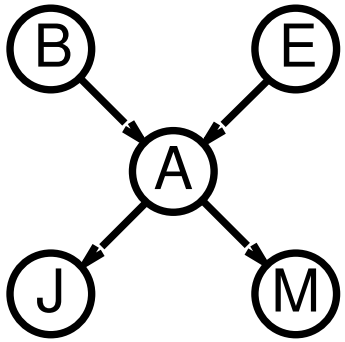
e.g., $P(j \wedge m \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg e)$

$= P(j|a)P(m|a)P(a|\neg b, \neg e)P(\neg b)P(\neg e)$

Semântica Global

Semântica global define a distribuição conjunta total como o produto distribuições condicionais locais:

$$\mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) = \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i | Parents(X_i))$$



Nesta situação dizemos que a distribuição P é compatível com a rede G.

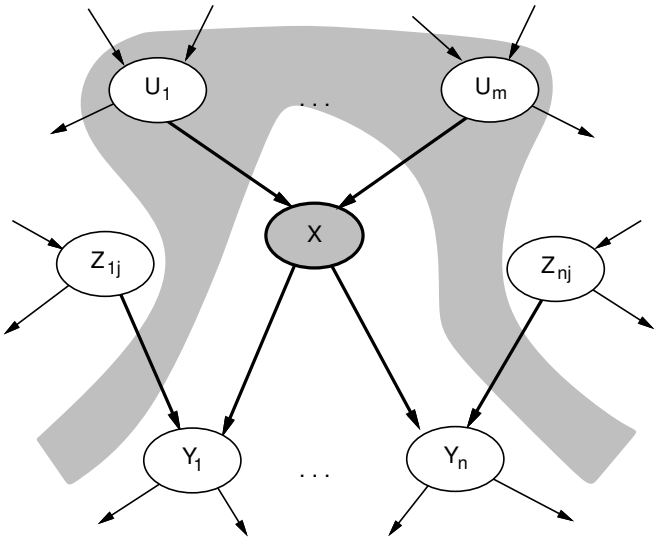
e.g., $P(j \wedge m \wedge a \wedge \neg b \wedge \neg e)$

$= P(j|a)P(m|a)P(a|\neg b, \neg e)P(\neg b)P(\neg e)$

$= 0.90 \times 0.70 \times 0.001 \times 0.999 \times 0.998 = 0.00062$

Semântica Local

Semântica Local: cada nó é condicionalmente independente dos seus não-descendentes dado os seus pais

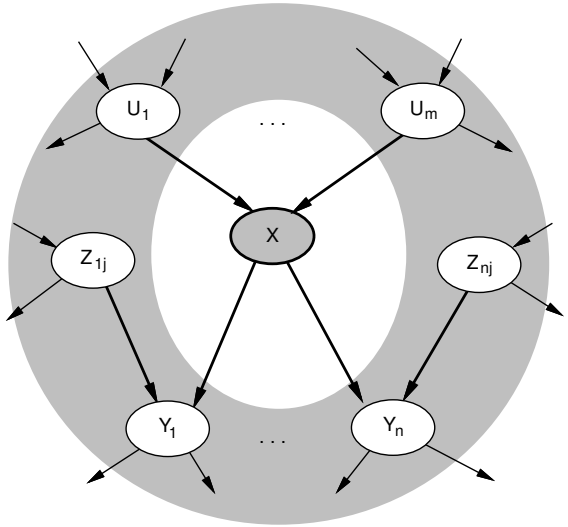


Para todo o nó X assume-se que $P(X|Z_{1j}, \ldots, Z_{nj}, U_1, \ldots, U_m) = P(X|U_1, \ldots, U_m)$.
Concluiu-se que:

Teorema: Semântica Local $\Leftrightarrow$ Semântica Global

Markov blanket

Cada nó é condicionalmente independente de todos os outros dado o seu Markov blanket: pais + filhos + pais dos filhos



Seja $W_1, \ldots W_p$ um qualquer conjunto de nós da rede disjunto do Markov Blanket de X tem-se $P(X|W_1, \ldots, W_p, U_1, \ldots, U_m, Y_1, \ldots, Y_n, Z_{1j}, \ldots Z_{nj}) = P(X|U_1, \ldots U_m, Y_1, \ldots, Y_n, Z_{1j}, \ldots Z_{nj})$

Grafos morais e d-separação

Sejam 3 subconjuntos de nós X, Y, Z de uma rede Bayesiana G. O grafo moral é construído da seguinte forma:

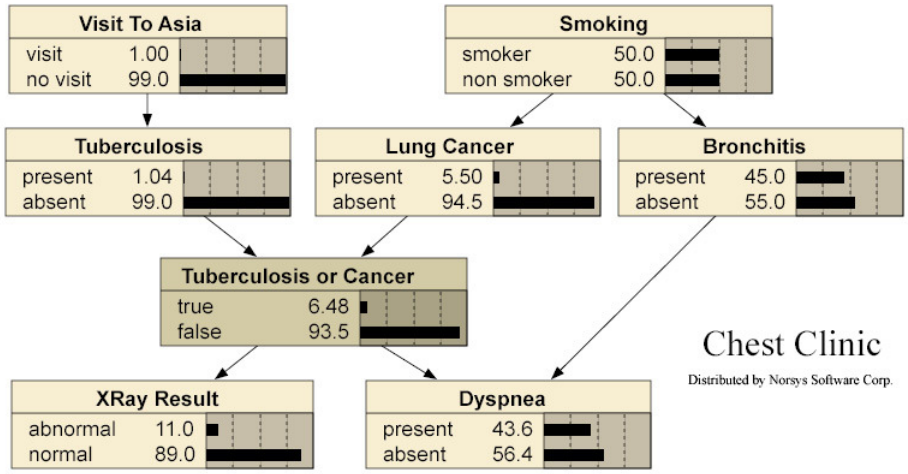
- Removem-se todos os nós de G exceptuando aqueles que se encontram em $X \cup Y \cup Z$ e todos os seus antecessores.
- Liga-se com uma aresta todo o par de nós que têm um filho comum.
- Removem-se as setas dos restantes arcos.

Dizemos que $(X \perp\!\!\!\perp Y|Z)_G$ (Z d-separa X de Y) quando todo o caminho entre X e Y é interceptado por Z no grafo moral.

Teorema: Sejam X, Y e Z quaisquer subconjuntos disjuntos de uma rede G e para toda a função de probabilidade P compatível com G, tem-se

1. Se $(X \perp\!\!\!\perp Y|Z)_G$ então X é condicional. indepen. de Y dado Z em P,
2. Se X é condicionalmente independente de Y dado Z para todas as distribuições P compatíveis com G, então $(X \perp\!\!\!\perp Y|Z)_G$.

Exemplo de d-separação



♢ "Tuberculosis or Cancer" d-separa "Tuberculosis" de "Bronchitis"?

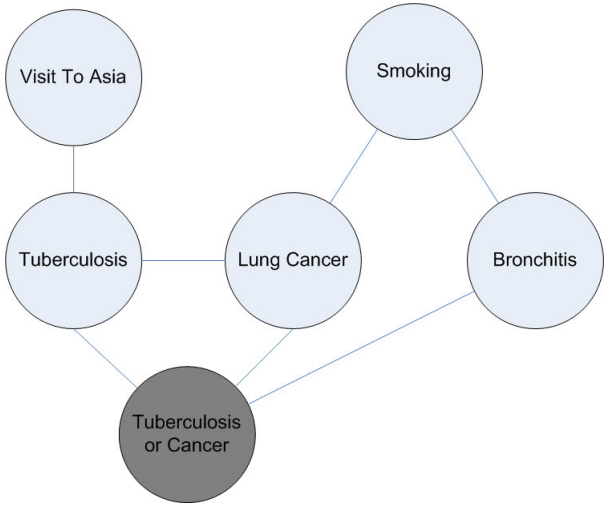
♢ "Tuberculosis or Cancer" d-separa "Tuberculosis" de "Dyspnea"?

♢ "Lung Cancer" d-separa Tuberculosis de "Bronchitis"?

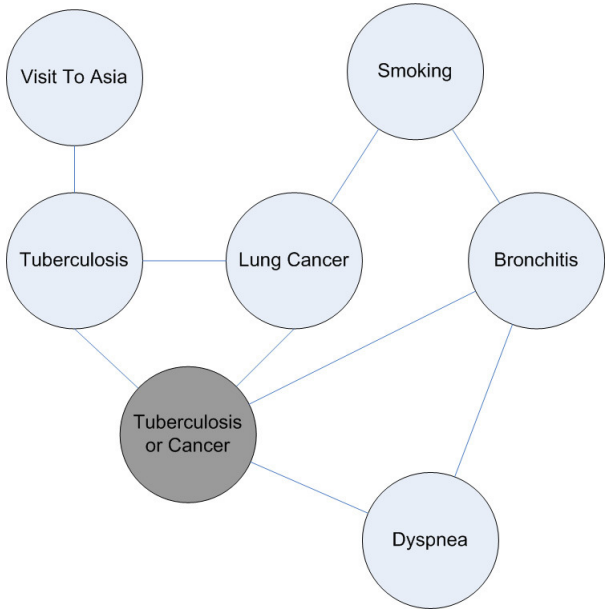
♢ "Tuberculosis or Cancer" e "Lung Cancer" d-separam "Tuberculosis" de "Dyspnea"?

Exemplo de d-separação (cont).

"Tuberculosis or Cancer" d-separa "Tuberculosis" de "Bronchitis"? Não

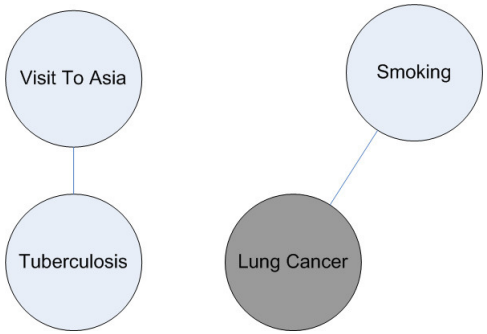


"Tuberculosis or Cancer" d-separa "Tuberculosis" de "Dyspnea"? Não

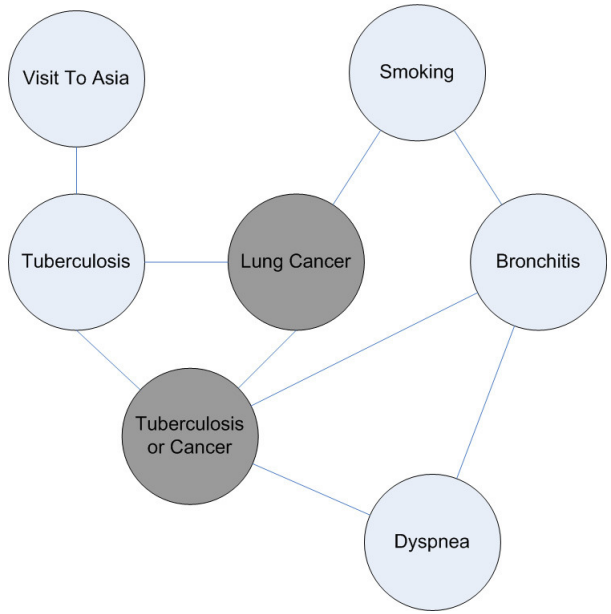


Exemplo de d-separação (cont).

"Lung Cancer" d-separa Tuberculosis de "Bronchitis"? Sim



"Tuberculosis or Cancer" e "Lung Cancer" d-separam "Tuberculosis" de "Dyspnea"? Sim



Construção de redes Bayesianas

É necessário um método tal que uma série de asserções testadas localmente de independência condicional garantam a semântica global pretendida

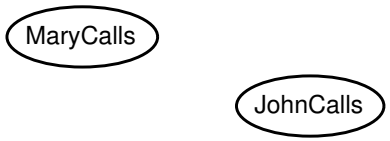
1. Escolher uma ordenação das variáveis $X_1, \ldots, X_n$
2. For $i = 1$ to n
   adicionar X_i à rede
   seleccionar pais de $X_1, \ldots, X_{i-1}$ tal que
   $$\mathbf{P}(X_i|Parents(X_i)) = \mathbf{P}(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1})$$

Esta escolha de pais garante a semântica global:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(X_1, \ldots, X_n) &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i|X_1, \ldots, X_{i-1}) \quad \text{(regra da cadeia)} \\ &= \prod_{i=1}^{n} \mathbf{P}(X_i|Parents(X_i)) \quad \text{(por construção)} \end{aligned}$$

Exemplo

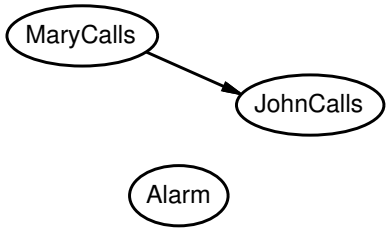
Suponhamos a seguinte ordenação M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$?

Exemplo

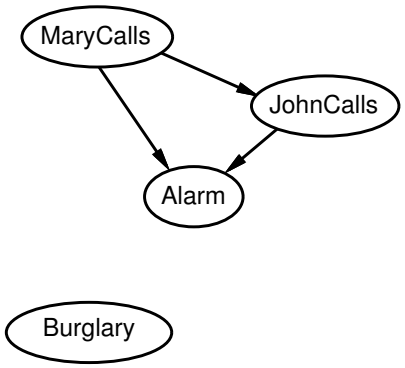
Suponhamos a seguinte ordenação M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$? Não
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$?

Exemplo

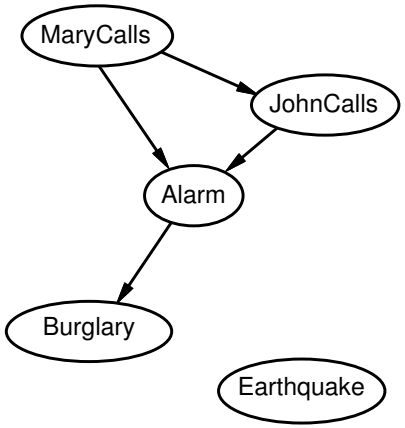
Suponhamos a seguinte ordenação M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$? Não
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$? Não
$P(B|A, J, M) = P(B|A)$?
$P(B|A, J, M) = P(B)$?

Exemplo

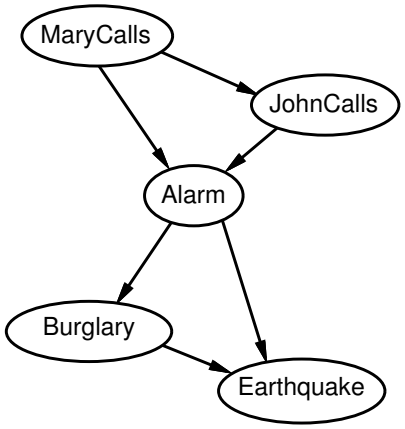
Suponhamos a seguinte ordenação M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$? Não
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$? Não
$P(B|A, J, M) = P(B|A)$? Sim
$P(B|A, J, M) = P(B)$? Não
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A)$?
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A, B)$?

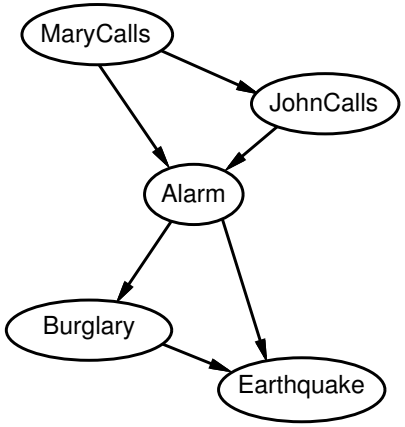
Exemplo

Suponhamos a seguinte ordenação M, J, A, B, E



$P(J|M) = P(J)$? Não
$P(A|J, M) = P(A|J)$? $P(A|J, M) = P(A)$? Não
$P(B|A, J, M) = P(B|A)$? Sim
$P(B|A, J, M) = P(B)$? Não
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A)$? Não
$P(E|B, A, J, M) = P(E|A, B)$? Sim

Exemplo (cont.)



Decidir sobre independência condicional é difícil nas direcções não causais: modelos causais e independência condicional parecem ser inatos nos humanos!

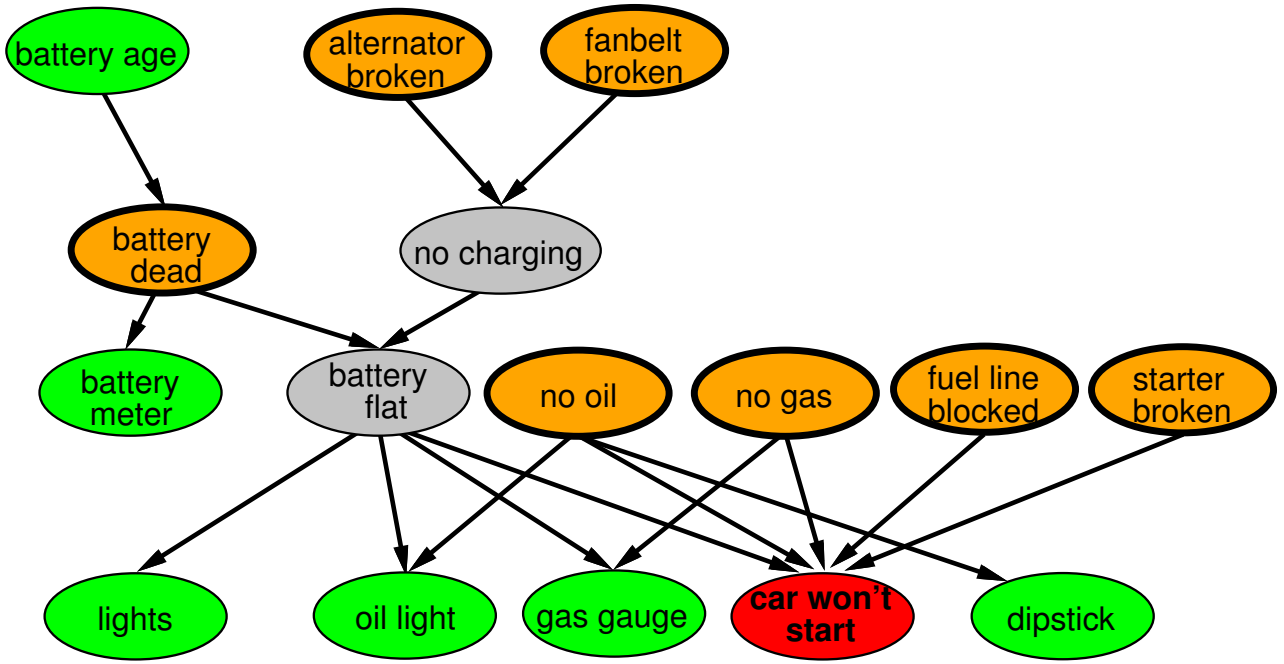
Determinação de probabilidades condicionais é difícil nas direcções não causais. Rede é menos compacta do que a inicial: necessários $1 + 2 + 4 + 2 + 4 = 13$ números

Exemplo: Diagnóstico de avarias

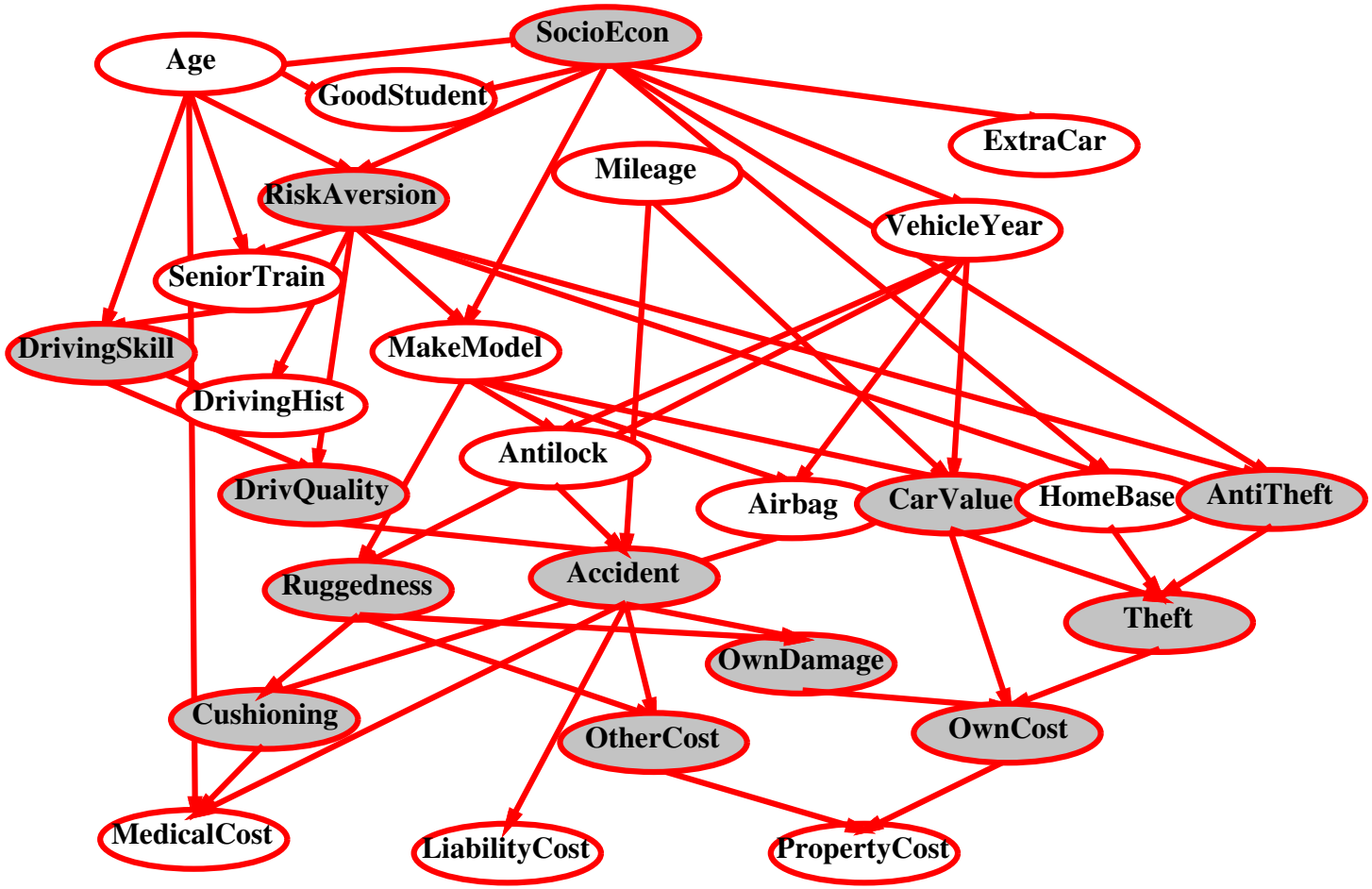
Evidência inicial evidência: carro não pega

Variáveis observáveis (verde), variáveis "avariado, arranja-o" (laranja)

Variáveis ocultas (cinzento) garantem estrutura esparsa, reduzem parâmetros



Exemplo: Seguro do carro



Distribuições condicionais compactas

CPT cresce exponencialmente com o número de pais
CPT fica infinita com pai ou filho tomando valores contínuos

Solução: distribuições canónicas que são definidas compactamente

Nós deterministas são o caso mais simples:
$X = f(Parents(X))$ para alguma função f

E.g., funções Booleanas
$NorthAmerican \Leftrightarrow Canadian \vee US \vee Mexican$

E.g., relações numéricas entre variáveis contínuas

$$\frac{\partial Level}{\partial t} = \text{inflow} + \text{precipitation} - \text{outflow} - \text{evaporation}$$

Distribuições condicionais compactas (cont.)

Distribuições Noisy-OR modelam múltiplas causas que não interagem

1) Pais $U_1 \ldots U_k$ incluem todas as causas (pode-se adicionar nó)
2) Probabilidade de falha independentes q_i para cada causa isoladamente

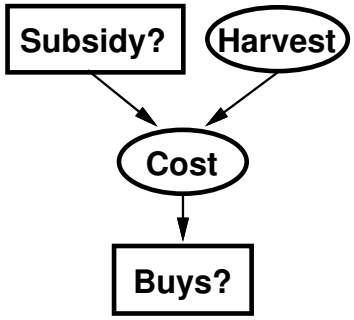
$$\Rightarrow P(X|U_1 \ldots U_j, \neg U_{j+1} \ldots \neg U_k) = 1 - \prod_{i=1}^{j} q_i$$

$Constip.$	$Gripe$	$Malaria$	$P(Febre)$	$P(\neg Febre)$
F	F	F	**0.0**	1.0
F	F	T	0.9	**0.1**
F	T	F	0.8	**0.2**
F	T	T	0.98	$0.02 = 0.2 \times 0.1$
T	F	F	0.4	**0.6**
T	F	T	0.94	$0.06 = 0.6 \times 0.1$
T	T	F	0.88	$0.12 = 0.6 \times 0.2$
T	T	T	0.988	$0.012 = 0.6 \times 0.2 \times 0.1$

Número de parâmetros **linear** no número de pais

Redes híbridas (discretas+contínuas)

Discretas ($Subsidy?$ e $Buys?$); contínuas ($Harvest$ and $Cost$)



Opção 1: discretização—erros podem ser grandes, CPTs grandes
Opção 2: famílias canónicas com número finito de parâmetros

1) Variável contínua, pais discretos+contínuos (e.g., $Cost$)
2) Variável discreta, pais contínuos (e.g., $Buys?$)

Variáveis filho contínuas

Necessária uma função de densidade condicional para cada variável filho dados pais contínuos, para cada possível atribuição de pais discretos

Mais habitual é o modelo linear Gaussiano, e.g.,:

$$\begin{aligned} & P(Cost = c | Harvest = h, Subsidy? = true) \\ = \; & N(a_t h + b_t, \sigma_t)(c) \\ = \; & \frac{1}{\sigma_t \sqrt{2\pi}} exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{c - (a_t h + b_t)}{\sigma_t} \right)^2 \right) \end{aligned}$$

Média $Cost$ varia linearmente com $Harvest$, variância fixa

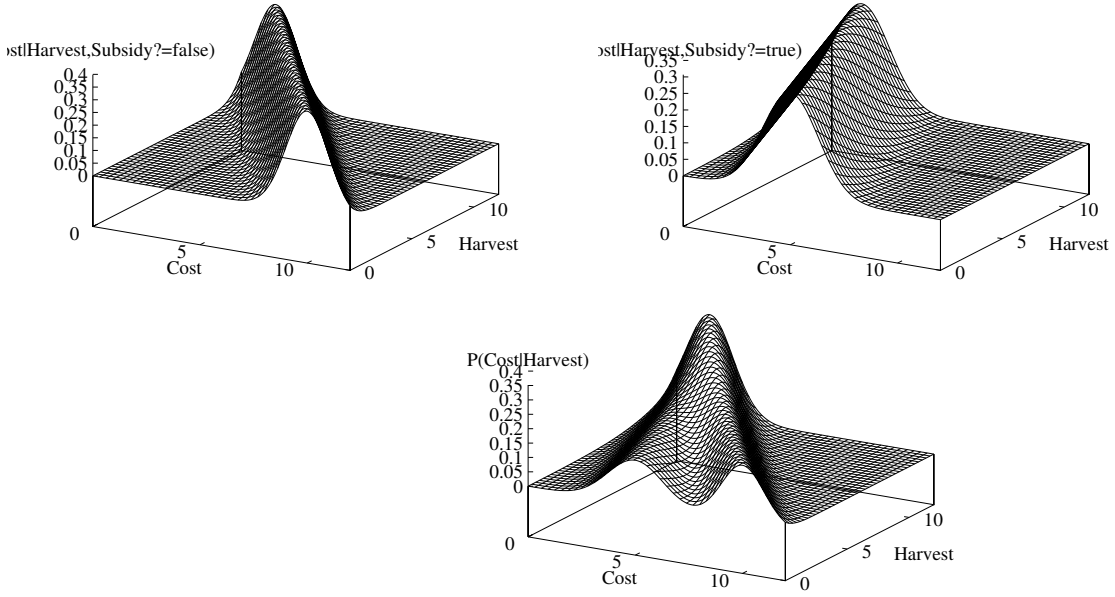
Variação linear não é razoável para todo o domínio
mas funciona bem se os valores **prováveis** de $Harvest$ estão limitados

Variáveis filho contínuas

Rede só com variáveis contínuas com distribuição LG

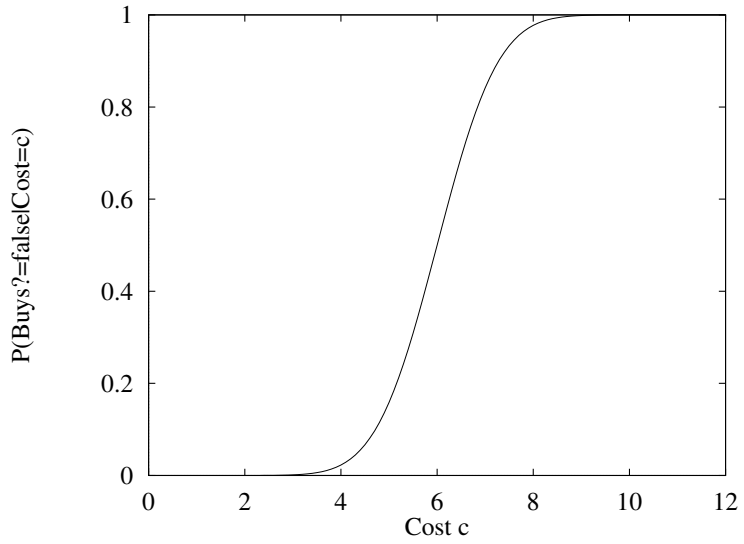
$\Rightarrow$ distribuição conjunta tem distribuição Gaussiana multivariada

Rede discreta+contínua LG é uma rede Gaussiana condicional, i.e., uma Gaussiana multivariada para todas as variáveis contínuas para cada combinação de valores de variáveis discretas



Variáveis discretas com pais contínuos

Probabilidade de $Buys?$ dado $Cost$ deve ser um limiar "suave":



Distribuição Probit utiliza integral de uma Gaussiana:

$\Phi(x) = \int_{-\infty}^{x} N(0,1)(x)dx$

$P(Buys? = true \mid Cost = c) = \Phi((-c + \mu)/\sigma)$

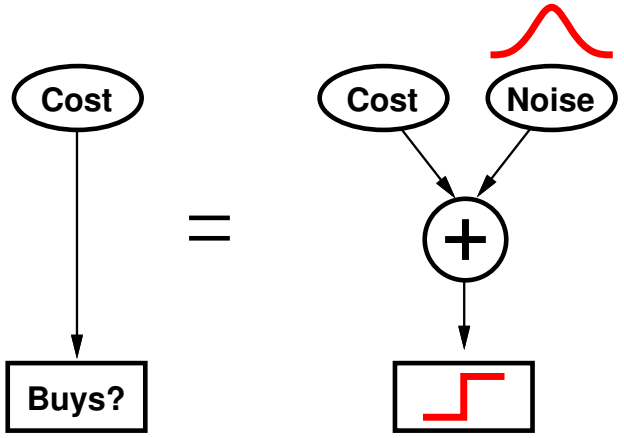
$P(Buys? = false \mid Cost = c) = 1 - \Phi((-c + \mu)/\sigma) = \Phi((c - \mu)/\sigma)$

Em que μ é o local onde ocorre o limiar e σ um parâmetro que controla a largura do limiar..

Porquê a probit?

1. Tem a forma correcta

2. Pode ser entendida como um limiar cuja localização está sujeita a ruído

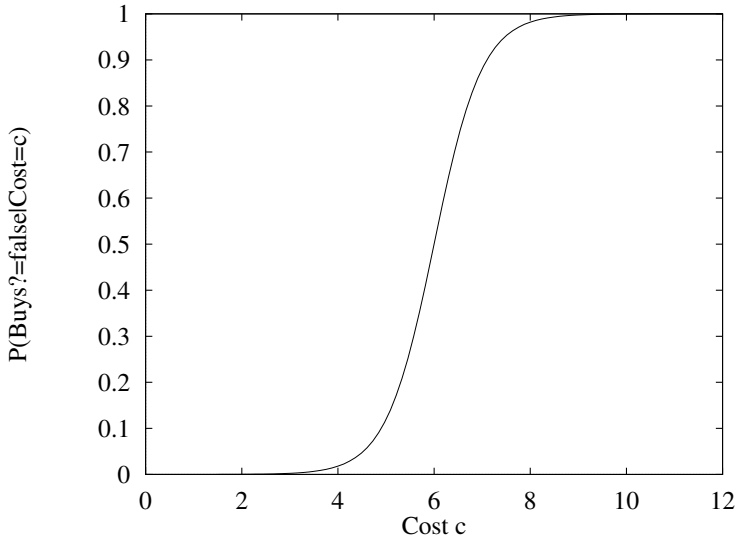


Variável discreta (cont.)

Distribuição Sigmóide (ou logit) também utilizada em redes neuronais:

$$P(Buys? = true \mid Cost = c) = \frac{1}{1 + exp(-2\frac{-c+\mu}{\sigma})}$$

Sigmóide tem forma semelhante à da probit mas com caudas maiores:



Sumário

Redes de Bayes são uma representação natural para independência condicional (induzidas causalmente)

Topologia + CPTs = representação compacta de distribuição conjunta

Geralmente fácil de construir por (não)peritos

Distribuições canónicas (e.g., noisy-OR) = representação compacta de CPTs

Variáveis contínuas $\Rightarrow$ distribuições parametrizadas (e.g., Gaussiana linear)